`Université des Sciences et Technologies de Lille`

Licence Miage - Programmation 1

Projet I : les polynômes

A rendre pour mercredi 20 décembre

L'objet de ce projet est de concevoir un paquetage permettant de manipuler des polynômes sur les entiers de manière symbolique : entrée/sortie, somme, produit, évaluation ... Vous avez toute liberté pour définir le type `Polynome`.

Saisie. Ecrire une procédure `Get`, qui saisit un polynôme de la forme $5x^3 - 21x + 14 + x^4$, par exemple. Pour cela, pensez à utiliser un automate.

Affichage. Ecrire une procédure `Put` qui affiche un polynôme, toujours sous la forme $5x^3 - 2x + 14$.

Évaluation. Écrire une fonction `Evaluation`, qui évalue un polynôme en un point. Pour optimiser le nombre de calculs, utilisez la *forme de Horner* : le polynôme $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ peut également s'écrire $(\cdots(a_n x + a_{n-1}) * x + \cdots + a_1) * x + a_0$.

Somme. Écrire la fonction `+`, qui fait la somme de deux polynômes. Cette fonction nécessite une attention particulière pour le degré du polynôme résultat : par exemple, la somme de $x^2 + 3x - 5$ et $-x^2 + x + 11$ doit donner un polynôme de degré 1, et non 2.

Différence. Ecrire une fonction qui fait la différence de deux polynômes.

Produit. Ecrire une fonction qui fait le produit de deux polynômes. Pour cela, vous avez deux options. L'option modeste, qui consiste à écrire une fonction itérative, de complexité en n^2, ou, soyez plus ambitieux, une fonction récursive de complexité inférieure ($n^{1.6}$).

Description de l'algorithme optimisé

Soient P de degré n et Q de degré m, les deux polynômes à multiplier. On définit p comme $\max(n+1, m+1)/2$, et P_1, P_2, Q_1 et Q_2 de degré au plus p tels que

$$\begin{aligned} P &= P_1 x^p + P_2 \\ Q &= Q_1' x^p + Q_2 \end{aligned}$$

P_1, P_2,Q_1 ou Q_1 peuvent éventuellement être vides.
L'astuce de l'algorithme consiste à remarquer que

$$P * Q = (P_1 * Q_1) * x^{2p} + (P_1 * Q_2 + Q_1 * P_2) * x^p + P_2 * Q_2$$

et que $(P_1 * Q_2 + Q_1 * P_2) = (P_1 + P_2) * (Q_1 + Q_2) - P1 * Q_1 - P_2 * Q_2$.
Cela permet d'écrire une fonction récursive, qui fait à chaque étape trois appels récursifs (réfléchissez bien): $P_1 * Q_1$, $P_2 * Q_2$ et $(P_1 + P_2) * (Q_1 + Q_2)$. Une fois calculé $P_1 * Q_1$, par exemple, comment peut-on obtenir $(P_1 * Q_1) * x^{2p}$ sans faire de multiplication, en temps constant ? Comment obtenir facilement P_1, P_2, Q_1, Q_2 en fonction de P et Q?