

# Logique et calcul

## Les nombres zébrés

Aussi fascinantes que le mouvement des vagues ou que la danse des flammes, les décimales des nombres zébrés émerveillent les mathématiciens expérimentateurs.

En remarquant qu'entre les positions 762 et 767 des décimales du nombre  $\pi$  surgit une série de six 9 consécutifs, certains se sont étonnés. Il est vrai que l'apparition, dans une suite de 1000 chiffres décimaux tirés au hasard d'une série, de six 9 côte à côte est un phénomène qui n'a environ qu'une chance sur mille de se produire. Rien ne semble expliquer cette étrangeté des décimales de  $\pi$ , mais comme rien n'a été trouvé ailleurs dans  $\pi$  qui fasse écho à cette singularité (on aurait pu par exemple trouver dix 9 consécutifs dans le premier million de décimales, ce qui ne s'est pas produit), les mathématiciens pensent qu'elle résulte du hasard. Aucune explication mathématique n'a donc à en être donnée : parmi les régularités possibles ayant une chance sur mille de se produire, six 0 consécutifs, six 1 consécutifs, présence de la séquence 123456, présence de la séquence 024680, etc., il n'y a pas à s'étonner que l'une au moins soit présente dans les mille premières décimales de  $\pi$ .

Cependant, d'autres phénomènes numériques concernant les suites de décimales des nombres réels sont bien plus frappants et exigent des explications, car ils ne peuvent survenir fortuitement. Nous présenterons plusieurs exemples de telles curiosités. Les nombres zébrés découverts récemment sont à la fois étonnants et subtils ; leur étude mi-sérieuse, mi-ludique intéresse de plus en plus d'amoureux des nombres. Ils sont intermédiaires entre les nombres rationnels, dont les décimales sont périodiques, et les nombres irrationnels, comme  $\sqrt{2}$  et  $\pi$ , dont les décimales semblent en parfait désordre.

### Régularités et triangle de Pascal

Commençons par un phénomène numérique facile à comprendre qui concerne le triangle de Pascal (appelé ainsi à tort puisqu'il était connu dans les pays de l'Islam dès le XI<sup>e</sup> siècle). Si vous calculez le nombre  $1,000001^7$  vous obtiendrez **1,000007000021000035000035000021000007000001**.

Entre les zéros apparaissent (en rouge) les nombres de la septième ligne du triangle de Pascal : 1,7,21,35,21,7,1.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Une façon de construire ce triangle consiste à créer les lignes les unes après les autres. La ligne numéro  $n+1$  est obtenue en additionnant terme à terme la ligne numéro  $n$  avec une version d'elle-même décalée vers la droite. Calculons selon cette méthode la ligne 7 à partir de la ligne 6

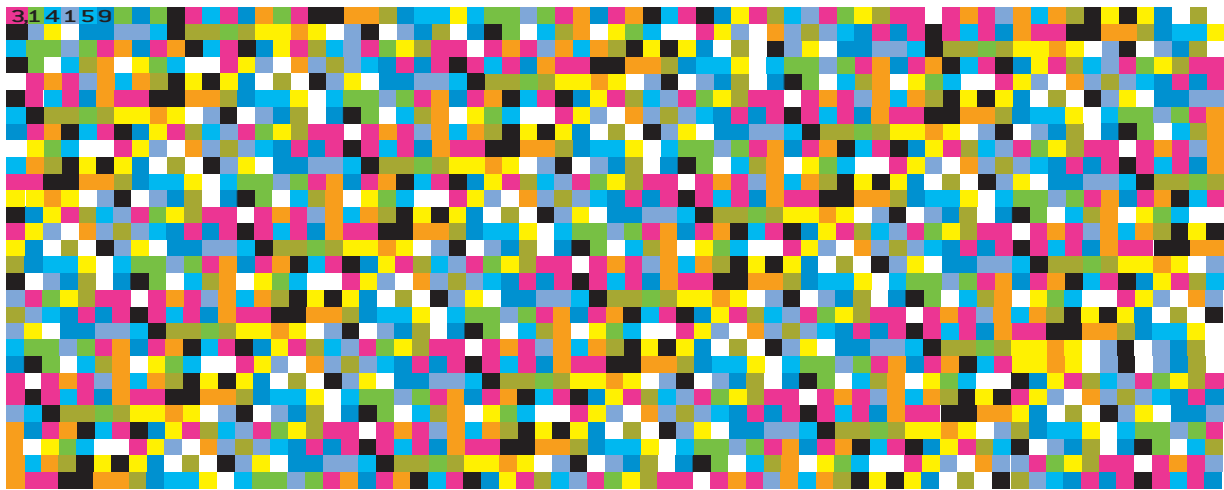
$$\begin{array}{r} 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ + \quad 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ \hline = 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \end{array}$$

Bien sûr, l'apparition des coefficients du triangle de Pascal dans le développement de  $1,000001^7$  n'est pas un hasard. La propriété que « le nombre  $1,000001^n$  découpé en tranches de six chiffres donne la ligne  $n$  du triangle de Pascal » est vraie pour la ligne numéro 1 ; supposons qu'elle soit vraie pour  $n$  et montrons qu'elle l'est alors pour  $n+1$  (nous faisons un raisonnement par récurrence). On opère le calcul de  $1,000001^{n+1}$  en remarquant que c'est  $1,000001^n \times 1,000001$  et en utilisant la disposition apprise à l'école pour effectuer cette multiplication. On est donc amené à additionner le développement de  $1,000001^n$  (supposé donné par la ligne numéro  $n$  du triangle de Pascal) avec lui-même décalé de six positions (à cause du deuxième facteur de la multiplication,  $1,000001$ ). Cette addition correspond à la définition du triangle de Pascal rappelée plus haut, et donc  $1,000001^{n+1}$  découpé en tranches de six chiffres donne bien la ligne  $n+1$  du triangle de Pascal.

**1. Les nombres zébrés**, comme  $\sqrt{\{10^{60} - 1\}}$  (*image centrale*), dont les premières décimales ont une pseudo-périodicité, sont intermédiaires entre les fractions rationnelles, comme  $355/113$  à la périodicité parfaite (*image du haut*), et les nombres irrationnels comme  $\pi$ , où il n'existe pas de périodicité (*image du bas*). Chaque couleur représente un chiffre selon le code indiqué en haut à droite.

a : 355/113

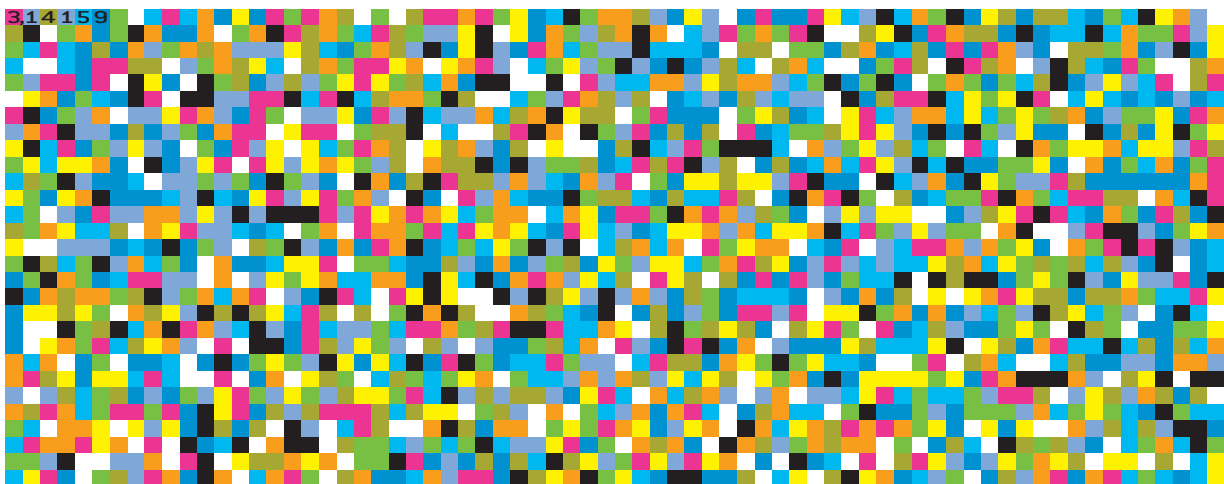
1234567890



b :  $\sqrt{10^{60} - 1}$



c :  $\pi$









Les nombres zébrés peuvent présenter des régularités plus complexes et qui fascinent ceux qui les étudient. Le plus étrange des zébrés numériques irrationnel appartient à une famille trouvée par Robert Israël du Département de mathématiques de l'Université de Colombie-Britannique à Vancouver au Canada. Il est défini par la formule :

$$k(n) = \sqrt{(9/121 \times 100^n + (112 - 44n)/121)}$$

Pour  $n = 95$  on découvre une étonnante suite des décimales zébrées dont l'étude est en cours (voir la figure 3). Les motifs ordonnés complexes se prolongent sur plus de 14 000 chiffres alors que le nombre dont on prend la racine carrée n'a aucune régularité évidente. Nous avons disposé les décimales pour en faire apparaître le mieux possible la structure complexe et étrange dont l'explication détaillée, à n'en pas douter, sera encore plus subtile et délicate que celle proposée pour les nombres zébrés précédents.

## Zébrures infinies ?

D'autres nombres zébrés sont encore à découvrir, qui conduiront peut-être à un nombre irrationnel spontané infiniment zébré, car jusqu'à présent tous les nombres zébrés découverts, aussi merveilleux soient-ils, ne le sont que sur une partie finie de leurs décimales. On sait qu'un nombre irrationnel n'est jamais périodique, mais rien en théorie n'interdit qu'une racine carrée irrationnelle possède des zébrures jusqu'à l'infini. Pourquoi n'en trouverions nous jamais ?

Bien que personne aujourd'hui n'en sache la raison, les nombres de la forme  $\sqrt{n}$ , lorsque  $n$  n'est pas un carré parfait, ont des décimales qui, à partir d'un certain point, satisfont à tous les tests statistiques usuels. En particulier la fréquence d'apparition de chacun des dix chiffres vaut  $1/10$ , comme si les chiffres étaient tirés au hasard par une loterie équitable. Ce n'est évidemment pas le cas puisque le calcul des chiffres de  $\sqrt{2}$ , par exemple, ne laisse rien au hasard et est fixé à l'avance par la définition de  $\sqrt{2}$ . On les obtient en mettant en œuvre un algorithme parfaitement déterministe !

Dans son roman *Contact*, publié en 1985, l'astronome et collaborateur de la NASA Carl Sagan (1934-1996) imaginait qu'un jour, explorant les décimales du nombre  $\pi$ , des chercheurs découvraient une structure bien trop régulière pour qu'elle puisse être attribuée au hasard (il s'agissait du dessin codé d'un cercle), et il proposait d'en interpréter la présence comme une preuve de l'existence de Dieu. On peut penser qu'il avait tort : pour les zébrures découvertes récemment dans des irrationnels simples, la recherche d'explications mathématiques, menée avec insistance, conduit à des explications parfois complexes, mais en tout point rationnelles. On peut donc croire que la découverte d'une structure dans les décimales de  $\pi$ , si elle se produisait, serait, elle aussi, expliquée mathématiquement. Le mystère aujourd'hui est plutôt qu'on ne comprend pas pourquoi aucune zébrure n'est infinie, ni pourquoi aucune régularité indéfiniment étendue n'apparaît jamais dans les décimales des irrationnels spontanés.

Chaque nombre irrationnel spontané est un océan de chiffres liant d'une façon mystérieuse l'ordre d'une définition précise et déterministe et l'apparent aléa parfait d'un tirage au sort illimité. Les zébrures découvertes récemment ne viennent troubler ce mystère inouï que sur le rivage.

## 5. Contact

Dans son roman *Contact* (Éditions Mazarine, Paris, 1986, traduit de l'ouvrage *Contact*, Simon and Schuster, New York, 1985) Carl Sagan (*ci-contre*) oppose deux personnages, Eleanor Arroway et Joss Palmer. Eleanor explore les décimales du nombre  $\pi$  à la recherche d'un motif régulier qui sera découvert dans les dernières pages du livre. Cette partie du roman n'a pas été retenue pour le film qui en a été tiré. Elle illustre une étrange conception de ce que pourrait être une réconciliation de toutes les religions grâce aux mathématiques.

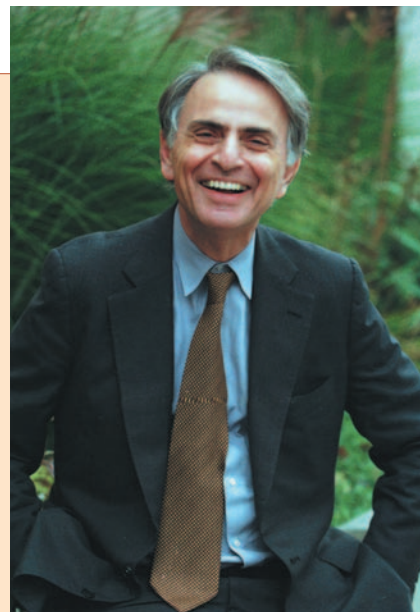
« Vous voyez que Dieu est mathématicien.

– Dans une certaine mesure, oui [...].

– Vous cherchez la révélation par l'arithmétique [...].

– Ceci est le seul moyen, l'unique moyen, Palmer. Il n'y a que cela qui puisse convaincre un sceptique. Imaginez que nous trouvions quelque chose. Quelque chose qui n'a d'ailleurs pas besoin d'être d'une effroyable complexité. Simplement significatif d'un ordre qui ne puisse rien devoir au hasard dans les chiffres de  $\pi$ . C'est tout ce dont nous avons besoin. Tous les mathématiciens pourront retrouver le même motif, ou quoi que ce soit que cet ordre s'avère être. C'est la fin du sectarisme ; tout le monde commencera à lire dans les mêmes *Écritures*. Plus personne ne pourra objecter que tel miracle essentiel, pour telle religion, n'était en fait qu'un tour de prestidigitation, ou que les historiens ont falsifié les documents, ou qu'il s'agit d'hystérie collective, d'illusion, d'un substitut aux parents une fois que nous sommes grands. Tout le monde pourra être croyant.»

Malheureusement pour ceux qui recherchent une preuve de l'existence de Dieu dans les mathématiques, même si l'on découvrait une régularité significative dans les décimales du nombre  $\pi$ , on ne pourrait rien en déduire. Comme dans le cas des irrationnels zébrés dont les structures peuvent être élucidées, une explication de nature purement mathématique pourrait finalement être donnée de la régularité ; en tout cas, elle n'aurait aucune raison d'être exclue comme a l'air de le penser Sagan. Ainsi, l'unification de l'humanité autour d'une même croyance ne se fera sans doute pas grâce au nombre  $\pi$ , contrairement au rêve mathématique de Sagan.



Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université de Lille.

Kevin BROWN, *Schizophrenic Numbers*, sur le site internet : <http://www.mathpages.com/home/kmath404.htm>

Richard HOMES. *Schizophrenic Numbers*, Zebra Irrationals, 2004.

Roland YÉLÉHADA, Communication personnelle, mai 2004.

David BAILEY, and Richard CRANDALL, *Random Generators and Normal Numbers*, 2003 (voir le site internet de David Bailey). Cet article examine l'aspect aléatoire des irrationnels spontanés.

Clifford PICKOVER. *Magiques mathématiques*, Dunod, 2003 (voir pages 74-76 et 277-28).

Jean-Paul DELAHAYE. *Le fascinant nombre  $\pi$* , Belin-Pour la Science, 1997 (Le chapitre 10 traite du problème de l'aspect aléatoire des décimales du nombre  $\pi$ ).

Carl SAGAN. *Contact*, Éditions Mazarine, Paris, 1986.